FACULTÉ DES SCIENCES JURIDIQUES, ÉCONOMIQUES ET SOCIALES AIN CHOCK
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Département des Sciences Economiques et Gestion

Filière : Sciences Economiques et Gestion

Semestre 2

Module: Probabilités

Pr. AIT CHEIKH

Année universitaire 2019 - 2020

Chapitre 4:

Lois de probabilités

Plan du Chapitre

- Section 1: Loi Binomiale
- Section 2 : Loi Normale
- Section 3 : Loi Normale Réduite
- Section 4: Approximation de la distribution binomiale par la loi normale
- Section 5: Loi de Poisson
- Section 6: Loi Multinomiale

Introduction:

Le choix d’une loi de probabilité dépend:

- De la nature du phénomène étudié;
- De la forme de la distribution (histogramme);
- Des caractéristiques de la variable aléatoire (Espérance, variance, écart type,……);

Chapitre 4: Lois de probabilités

Section 1: Loi Binomiale

Définition (Distribution de Bernoulli)

Considérons une **expérience** qui n'a que **deux résultats possibles** dont l'un est appelé $\boldsymbol{R}$ (**réussite**) et l'autre est appelé $\boldsymbol{E}$ (**échec**), avec $\boldsymbol{p(R) = p}$ et la probabilité d'échec $\boldsymbol{p(E) = q = 1 - p}$. Ce genre d'expérience s'appelle **expérience de *Bernoulli*** (du nom du mathématicien suisse *Jacques Bernoulli*) dont **la loi de probabilité** est donnée par :

$$\boldsymbol{X \sim \mathfrak{B}(1; p)} \text{ d'espérance } \boldsymbol{E(X) = p} \text{ et de variance } \boldsymbol{Var(X) = p \times q}$$

Section 1: Loi Binomiale

Définition (Distribution de Bernoulli)

Exemple:

On lance un dé et on nomme succès, le fait que le nombre inscrit sur sa face supérieure soit égale à 3 et échec si ce nombre soit différent de 3. On obtient alors la loi de Bernoulli suivante:

X	**1**	**0**
P(X=x_i)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

On calcule **E(X)** et **V(X)**:

$$E(X) = p = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = pq = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

Section 1: Loi Binomiale

Définition (Distribution Binomiale)

Répétons d'une manière ***identique*** et ***indépendante*** cette expérience $\boldsymbol{n}$ **fois** et considérons la **v.a.** ***discrète*** X qui **compte le nombre de succès** au cours des $\boldsymbol{n}$ **essais**.
Les valeurs possibles pour X sont $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, .., n}$ et la loi de probabilité de X est donnée par :

$$\boldsymbol{\mathcal{B}(k; n; p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Donc : Si $\boldsymbol{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(k; n; p)}$ **Alors :** $\boldsymbol{E(X) = np}$ $\boldsymbol{Var(X) = n \times pq}$

Exemple

On jette **6 fois** une pièce de monnaie bien équilibrée, ou encore, on jette six pièces bien équilibrées. On suppose que « ***face*** » correspond à un ***succès***. On a donc : $\boldsymbol{n = 6}$ et $\boldsymbol{p = q = 1/2}$.

- La probabilité pour que l'on ait exactement deux faces, c'est à dire : $\boldsymbol{k = 2}$

$$\mathcal{B}(k;n;p) = \mathcal{B}\left(2;6;\frac{1}{2}\right) = P(X = 2) = \binom{6}{2} p^2 q^{6-2} = C_6^2 \frac{1}{2}^2 \times \frac{1}{2}^4 = \frac{15}{64}$$

- La probabilité d'obtenir **au moins quatre faces**, c'est-à-dire $\boldsymbol{k = 4}$**, 5 ou 6** est :

$$\mathcal{B}\left(4;6;\frac{1}{2}\right) + \mathcal{B}\left(5;6;\frac{1}{2}\right) + \mathcal{B}\left(6;6;\frac{1}{2}\right) = C_6^4 \frac{1}{2}^4 \times \frac{1}{2}^2 + C_6^5 \frac{1}{2}^5 \times \frac{1}{2}^1 + C_6^6 \frac{1}{2}^6 \times \frac{1}{2}^0$$
$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

Exemple

- La probabilité de **n'avoir aucune face**, c'est-à-dire uniquement **les échecs $\boldsymbol{k = 0}$**

$$\mathcal{B}\left(0; 6; \frac{1}{2}\right) = C_6^0 \frac{1}{2}^0 \times \frac{1}{2}^6 = \frac{1}{64}$$

- La probabilité d'avoir **au moins une fois face**, c'est-à-dire le **complément du cas précédent :**

$$1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Exemple

On jette **7 fois** un dé bien équilibré et on suppose qu'un 5 ou un 6 correspond à un succès.

On a : $\boldsymbol{n = 7}$ $\boldsymbol{p = \{5, 6\} = 2/6 = 1/3}$ $\boldsymbol{q = 1 - p = 2/3}$

- La probabilité pour obtenir un 5 ou un 6, exactement 3 fois :

$$\mathcal{B}\left(3; 7; \frac{1}{3}\right) = C_7^3 \frac{1}{3}^3 \times \frac{2}{3}^4 = \frac{560}{2187}$$

- La probabilité pour que l'on n'ait jamais un 5 ou un 6

$$\mathcal{B}\left(0; 7; \frac{1}{3}\right) = q^7 = C_7^0 \frac{1}{3}^0 \times \frac{2}{3}^7 = \frac{128}{2187}$$

Exemple

- La probabilité d'avoir au moins une fois un 5 ou un 6 :

$$\mathbf{1 - q^7 = \frac{2059}{2187}}$$

Astuce :

La loi de probabilité Binomiale peut être écrite selon le tableau suivant :

k	0	1	2	$\dots$	n
$P(k)$	q^n	$C_n^1 q^{n-1} p$	$C_n^2 q^{n-2} p^2$	$\dots$	p^n

Les termes de probabilités correspondent aux termes successifs du développement de binôme :

$$(p+q)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \cdots + p^n$$

C'est pour cela que l'on appelle la distribution binomiale.

Section 1: Loi Binomiale

Table de la loi Binomiale

On peut trouver grâce aux **tables de la loi Binomiale** les valeurs des probabilités ainsi que les fonctions de répartition binomiales pour un $n = 5\,; 10; 15; 20; 30; 40; 50$

Exemple

On jette **cinq pièces** équilibrées. Les résultats sont supposés indépendants. Donner la loi de probabilité de la variable X qui compte le nombre de piles obtenus.

Soit $\boldsymbol{X}$ **le nombre de piles** (**donc de succès**) au total. $\boldsymbol{X}$ **est une v.a. Binomiale** de paramètres ($\boldsymbol{n = 5}$ **et** $\boldsymbol{p = {}^{1}/_{2} = 0,5 = 50\%}$). Soit $\boldsymbol{X \sim \mathcal{B}\left(k; 5; \frac{1}{2}\right)}$ la loi de probabilité de X est donnée par :

					p					
k	**1%**	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**30%**	**40%**	**50%**	**70%**	**90%**
0	0,951	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,1681	0,0778	**0,0313**	0,0024	0
1	0,048	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3602	0,2592	**0,1563**	0,0284	0,0005
2	0,001	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,3087	0,3456	**0,3125**	0,1323	0,0081
3		0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,1323	0,2304	**0,3125**	0,3087	0,0729
4			0,0005	0,0022	0,0064	0,0284	0,0768	**0,1563**	0,3602	0,3281

Section 1: Loi Binomiale

Sur la base du Calculs	Lecture sur la table de la loi binomiale
$P(X=0)=\binom{5}{0}(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}=0,0313$	$P(X=0)=0,0313$
$P(X=1)=\binom{5}{1}(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{32}=0,1563$	$P(X=1)=0,1563$
$P(X=2)=\binom{5}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^3=\frac{10}{32}=0,3125$	$P(X=2)=0,3125$
$P(X=3)=\binom{5}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2=\frac{10}{32}=0,3125$	$P(X=3)=0,3125$
$P(X=4)=\binom{5}{4}(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^1=\frac{5}{32}=0,1563$	$P(X=4)=0,1563$
$P(X=5)=\binom{5}{5}(\frac{1}{2})^5(\frac{1}{2})^0=\frac{1}{32}=0,0313$	$P(X=5)=0,0313$

Section 2: Loi Normale

Définition:

La distribution **normale** (ou de **Laplace-Gauss**) est définie par **la loi de paramètres** (μ , $\boldsymbol{\sigma}$) si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2[(x-\mu)^2/\sigma^2]}$$

Où μ et $\sigma > 0$ sont des constantes. On note :

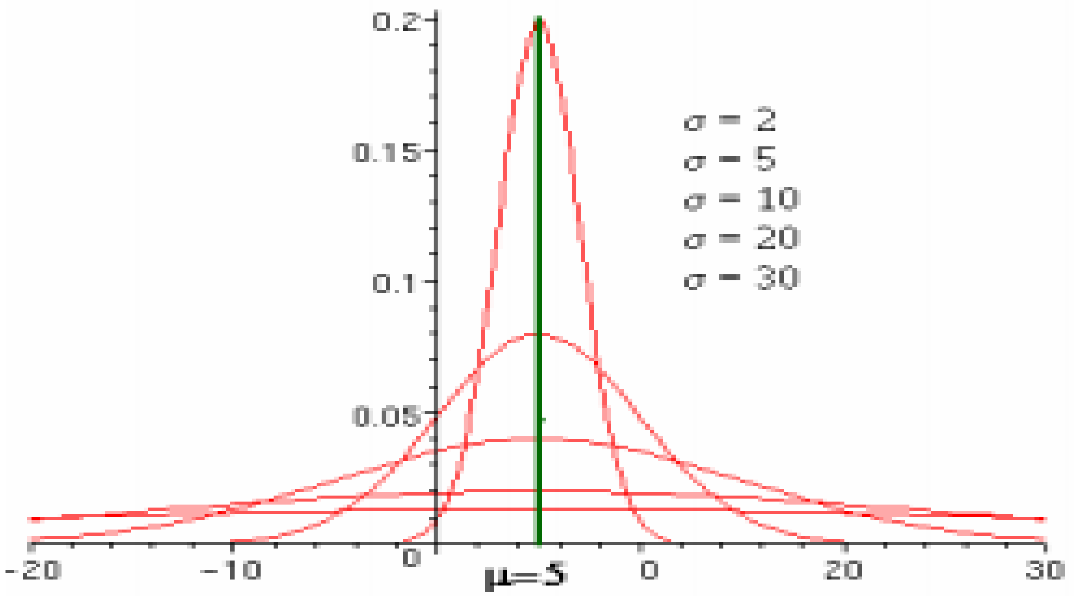
$$X \leadsto \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$$

- **La somme des probabilités est égale à 1:** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Chapitre 4: Lois de probabilités

Section 2: Loi Normale

Le diagramme ci-dessous montre les variations de f en fonction de μ et de σ. On observe que les courbes, en forme de cloche, sont symétriques par rapport à $\boldsymbol{x = \mu}$.



La distribution normale a les propriétés suivantes :

- L'espérance de la loi normale : $\boldsymbol{E(X) = \mu}$
- La variance de la loi normale : $\boldsymbol{Var(X) = \sigma^2}$

Fonction de répartition de la loi Normale

Définition :

Si X est normalement distribuée avec paramètres μ et σ^2, alors $\boldsymbol{Y = \alpha X + \beta}$ est normalement distribuée avec paramètres $\boldsymbol{\alpha\mu + \beta}$ **et** $\boldsymbol{\alpha^2\sigma^2}$. Ceci résulte du fait que F_Y, la fonction de répartition de la variable Y, est donné par (lorsque $\alpha > 0$):

$$\boldsymbol{F_Y = P(Y \leq \alpha)}$$

Section 3: Loi Normale Réduite

Transformation en une loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}\ ;\ \mathbf{1})$

Si X est une variable normalement distribuée et de paramètres μ et σ^2, la variable $\boldsymbol{Z = (X - \mu)/\sigma}$ est normalement distribuée de paramètres **0 et 1**.

Définition

Soit X une v.a. ayant une loi de distribution normale. On peut calculer la probabilité $\boldsymbol{P(a < X < b)}$ pour que X soit **entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$**, de la manière suivante:
On transforme d'abord **$\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ en unités centrées réduites.**

$$\boldsymbol{a' = \frac{(a - \mu)}{\sigma}} \qquad \boldsymbol{b' = \frac{(b - \mu)}{\sigma}}$$

On a :

$$\boldsymbol{P(a < X < b) = P(a' < X^* < b')}$$

$\boldsymbol{X^*}$ désigne la **v.a centrée réduite correspondant à $\boldsymbol{X}$**. $\boldsymbol{X^*}$ a donc une loi normale centrée réduite $\boldsymbol{\mathcal{N}(0\ ;\ 1)}$.

Fonction de densité de $\mathcal{N}(0\,;\,1)$

Définition

Si on pose $\boldsymbol{Z = (x - \mu)/\sigma}$ dans la formule précédente de $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, on obtient la distribution normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$, dont sa densité de probabilité est donnée par :

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

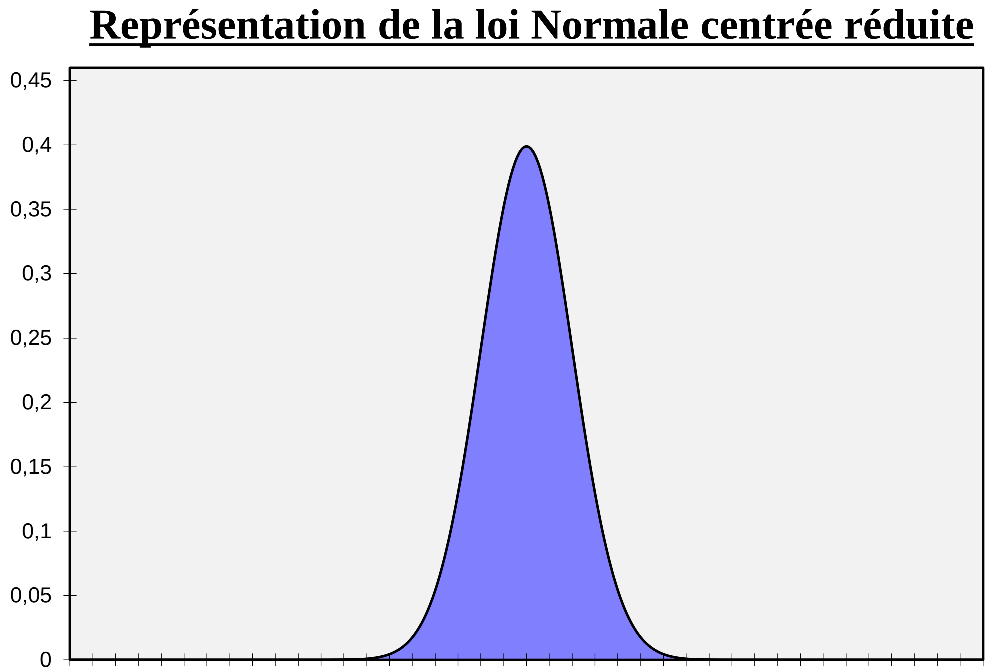
La distribution normale centrée réduite **notée $\boldsymbol{Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)}$** a les propriétés suivantes :

- L'espérance de la loi normale : $\boldsymbol{E(Z) = 0}$
- La variance de la loi normale : $\boldsymbol{Var(Z) = 1}$

La Fonction de répartition de la loi normale réduite permet d'obtenir les probabilités associées à toutes variables aléatoires normales $N(\mu, \sigma)$ **après transformation en variable centrée réduite**.

Fonction de densité de $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$

Représentation graphique



Propriétés de cette distribution:

- La courbe de $\boldsymbol{f}$ **est symétrique** par rapport à **l'axe des ordonnées ($\boldsymbol{y}$).**
- La surface comprise entre la courbe et l'axe des x est **égale à $\mathbf{1}$**, donc **l'axe des $\boldsymbol{y}$ divise** cette surface en **deux parties égales chacune à $\mathbf{0,5}$.**
- Pour calculer une probabilité, lorsque $Z \backsim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, on se sert d'une table construite pour cela.

Fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite

Définition :

On appelle ***fonction π*** , la **fonction de répartition** d'une **variable normale réduite *X***.

$$\boldsymbol{\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-Z^2/2} dz}$$

On peut exprimer la fonction de répartition de X comme suit :

$$\boldsymbol{F_X(a) = P\{X \leq a\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \pi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

Table de la loi normale centrée réduite

Les valeurs positives de $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})$ sont données dans la **table statistique (2.1)** (**Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**), **pour les valeurs négatives on calcul $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})$ grâce à l'équation : $\boldsymbol{\pi}(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x})$**.

La table (2.1) donne **l'aire située** en dessous de la courbe de la loi normale centrée réduite entre $t = 0$ et une valeur quelconque positive de t. La symétrie de la courbe par rapport à $t = 0$ permet d'obtenir l'aire située entre deux valeurs quelconques de t.

Exemple

Soit X une v.a. de paramètres $\mu = \mathbf{3}$ et $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{9}$ notée : $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\mathbf{3}, \sqrt{\mathbf{9}})$. Calculer:

$$\boldsymbol{P}\{\mathbf{2} < \boldsymbol{X} < \mathbf{5}\} \qquad \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} > \mathbf{0}\} \qquad \boldsymbol{P}\{|\boldsymbol{X} - \mathbf{3}| > \mathbf{6}\}$$

Table de la loi normale centrée réduite

Exemple

Soit X une v.a. de paramètres $\mu = \mathbf{3}$ et $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{9}$ notée : $\boldsymbol{X \backsim N(3, \sqrt{9})}$. Calculer:

$$\boldsymbol{P\{2 < X < 5\} = P\left\{\frac{2-3}{3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-3}{3}\right\} = P\left\{-\frac{1}{3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2}{3}\right\}}$$

$$\boldsymbol{= P\left\{-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right\} = \pi\left(\frac{2}{3}\right) - \pi\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\boldsymbol{= \pi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \pi\left(\frac{1}{3}\right)\right]}$$

Sur la table (2.1), la **lecture de** $\boldsymbol{\pi\left(\frac{2}{3}\right) = \pi(0.67)}$ s'effectue ainsi : $\boldsymbol{0,6}$ (au niveau de la première **colonne**, et $\boldsymbol{0,07}$ au niveau de la première **ligne**, puis on cherche **l'intersection** des deux). Donc: $\boldsymbol{\pi\left(\frac{2}{3}\right) = 0,7486}$ et $\boldsymbol{\pi\left(\frac{1}{3}\right) = 0,6293}$

$$\boldsymbol{P\{2 < X < 5\} = 0,7486 - [1 - 0,6293] = 0,3779}$$

Table de la loi normale centrée réduite

Exemple

Sur la table (2.1), la **lecture de** $\boldsymbol{\pi}\left(\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{0.67})$ s'effectue ainsi : $\mathbf{0,6}$ (au niveau de la première **colonne**, et $\mathbf{0,07}$ au niveau de la première **ligne**, puis on cherche **l'intersection** des deux). Donc**:** $\boldsymbol{\pi}\left(\frac{2}{3}\right) = \mathbf{0,7486}$ et $\boldsymbol{\pi}\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{0,6293}$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389

Table de la loi normale centrée réduite

Exemple

Soit X une v.a. de paramètres $\mu = \mathbf{3}$ et $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{9}$ notée : $\boldsymbol{X \sim N(3, \sqrt{9})}$. Calculer:

$$\boldsymbol{P\{X > 0\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{0 - 3}{3}\right\} = P\{Z > -1\} = 1 - P\{Z \leq -1\} = 1 - \pi(-1) = 1 - 1 + \pi(1) = \pi(1) = 0,8413}$$

z	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	**0,8413**	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767

Table de la loi normale centrée réduite

Exemple

Soit X une v.a. de paramètres $\mu = \mathbf{3}$ et $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{9}$ notée : $\boldsymbol{X \rightsquigarrow N(3, \sqrt{9})}$. Calculer:

$$P\{X > 0\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{0-3}{3}\right\} = P\{Z > -1\} = 1 - \pi(-1) = 1 - 1 + \pi(1) = \pi(1) = 0,8413$$

$$P\{|X-3| > 6\} = P\{|X-3| > 6\} = P\{X - 3 > 6\} + P\{3 - X > 6\}$$

$$= P\{X > 9\} + P\{X < -3\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9-3}{3}\right\} + P\left\{Z < \frac{-3-3}{3}\right\}$$

$$= P\{Z > 2\} + P\{Z < -2\} = 1 - P\{Z \leq 2\} + P\{Z < -2\} = 1 - \pi(2) + \pi(-2)$$

$$= [1 - \pi(2)] + [1 - \pi(2)] = 2[1 - \pi(2)] = 2[1 - 0,9772] = 0.0456$$

Table de la loi normale centrée réduite

Exemple

Soit X une v.a. de paramètres $\mu = \mathbf{3}$ et $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{9}$ notée : $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \boldsymbol{N}(\mathbf{3}, \sqrt{\mathbf{9}})$. Calculer:

$$= [\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{2})] + [\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{2})] = \mathbf{2}[\mathbf{1} - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{2})] = \mathbf{2}[\mathbf{1} - \mathbf{0,9772}] = \mathbf{0.0456}$$

2	**0,9772**	**0,9778**	**0,9783**	**0,9788**	**0,9793**	**0,9798**	**0,9803**	**0,9808**	**0,9812**	**0,9817**
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Section 4: Approximation de la distribution binomiale par la loi normale

Définition

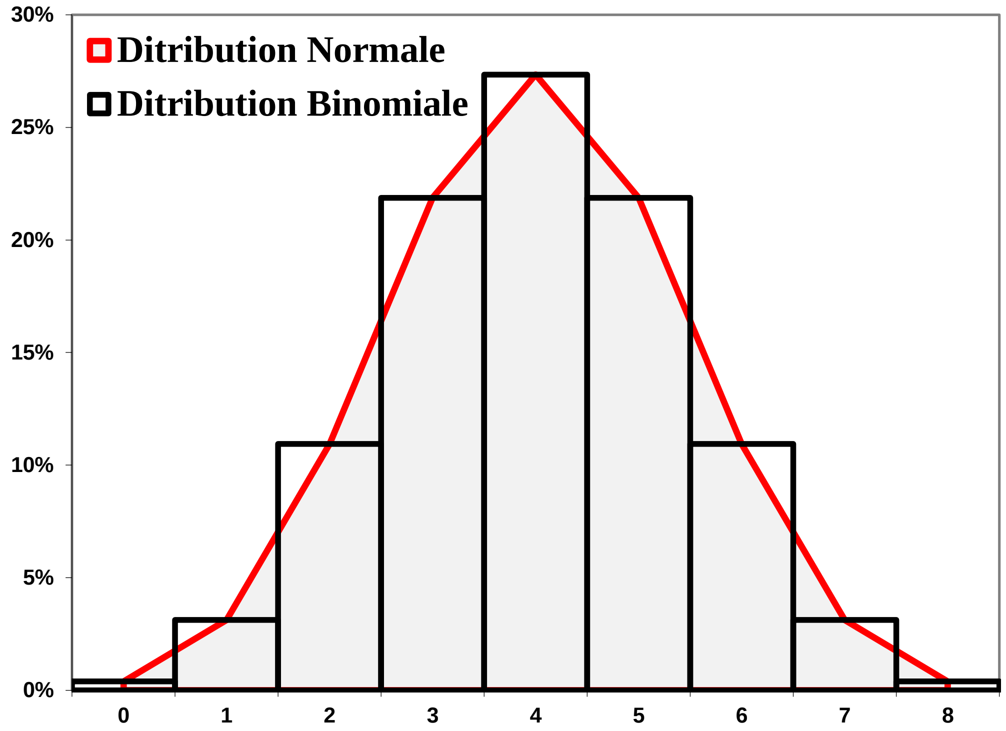
La distribution binomiale $P(k) = \mathfrak{B}(k\ ;\ n, p)$ est très voisine de la distribution normale, quand n soit grand et ni $\boldsymbol{p}$, ni $\boldsymbol{q}$ ne soient trop proches de zéro (en pratique si $\boldsymbol{np \geq 5}$ **et** $\boldsymbol{nq \geq 5}$).

On peut constater cette propriété sur le diagramme suivant où l'on a choisi la distribution binomiale correspondant a $\boldsymbol{n = 8}$ et $\boldsymbol{p = q = 1/2}$.

$\boldsymbol{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{P(k)}$	q^n $\frac{1}{256}$ 0,0039	$C_n^1 q^{n-1} p$ $\frac{8}{256}$ 0,0313	$C_n^2 q^{n-2} p^2$ $\frac{28}{256}$ 0,1094	$\frac{56}{256}$ 0,2188	.. $\frac{70}{256}$ 0,2734	.. $\frac{56}{256}$ 0,2188	$\frac{28}{256}$ 0,1094	$\frac{8}{256}$ 0,0313	p^n $\frac{1}{256}$ 0,0039

Section 4: Approximation de la distribution binomiale par la loi normale

Représentations comparées des distributions binomiale et normale



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(k)$	q^n	$C_n^1 q^{n-1} p$	$C_n^2 q^{n-2} p^2$		..	..			p^n
	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$
	0,0039	**0,0313**	**0,1094**	**0,2188**	**0,2734**	**0,2188**	**0,1094**	**0,0313**	**0,0039**

Théorème Central Limite

Soient $X_1, X_2, .. X_n$ une suite de variables aléatoires **indépendantes** de **même loi de distribution,** donc de mêmes moyenne μ et de mêmes variance σ^2 :

En posant : $\boldsymbol{S_n = X_1 + X_1 + .. + X_n}$, on peut montrer que $\boldsymbol{E(S_n) = n}\mu$ et $V(\boldsymbol{S_n}) = \boldsymbol{n}\sigma^2$ et que:

$$\boldsymbol{Z_n = \frac{(X_1 + X_1 + .. + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}}$$

$$\boldsymbol{E(Z_n) = 0} \text{ et } \boldsymbol{V(Z_n) = 1}$$

$\boldsymbol{Z_n}$ n'est que la **variable aléatoire centrée réduite** obtenue à partir de $\boldsymbol{S_n}$

Exemple

Soit X la v.a. comptant le nombre d'occurrences de pile lors d'une série de **40 jets**. On veut calculer $\boldsymbol{P\{X=20\}}$ **par approximation normale et comparer le résultat avec la valeur exacte**.

Comme X est une **variable discrète** tandis qu'une variable normale est continue, la meilleure approximation de la probabilité cherchée sera :

- $\boldsymbol{Var(X) = npq = 40 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 10}$
- $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{10}}$
- $\boldsymbol{E(X) = np = 40 \times \frac{1}{2} = 20}$

$$\boldsymbol{P\{X = 20\} = P\{19,5 < X < 20,5\}}$$

$$\boldsymbol{P\{\frac{19,5-20}{\sqrt{10}} < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < \frac{20,5-20}{\sqrt{10}}\}}$$

$$\boldsymbol{= P\left\{-0,16 < \frac{X-20}{\sqrt{10}} < 0,16\right\}}$$

$$\boldsymbol{= \pi(0,16) - \pi(-0,16) = 2\pi(0,16) - 1}$$

$$\boldsymbol{= 2(0,5636) - 1 = 0,1272}$$

Section 4: Approximation de la distribution binomiale par la loi normale

Exemple

$$\boldsymbol{P\{X = 20\} = P\{19,5 < X < 20,5\}}$$

$$= P\{\frac{19,5 - 20}{\sqrt{10}} < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < \frac{20,5 - 20}{\sqrt{10}}\}$$

$$= P\left\{-0,16 < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} < 0,16\right\}$$

$$= \pi(0,16) - \pi(-0,16) = 2\pi(0,16) - 1$$

$$= 2(0,5636) - 1 = 0,1272$$

Le résultat exact est :

$$\boldsymbol{P\{X = 20\} = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 0,1254}$$

On peut lire aussi le résultat exact à partir de la Table statistiques pour $\boldsymbol{p = 50\%}$ et $\boldsymbol{k = 20}$.

Section 4: Approximation de la distribution binomiale par la loi normale

Exemple

On peut lire aussi le résultat exact à partir de la Table statistiques pour $\boldsymbol{p} = \mathbf{50}\%$ et $\boldsymbol{k} = \mathbf{20}$.

					p					
k	**1%**	**5%**	**10%**	**15%**	**20%**	**30%**	**40%**	**50%**	**70%**	**90%**
0	0,6690	0,1285	0,0148	0,0015	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0532	0,2777	0,1423	0,0365	0,0065	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0000	0,0342	0,1647	0,1692	0,0854	0,0061	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
7		0,0027	0,0576	0,1493	0,1513	0,0315	0,0015	0,0000	0,0000	0,0000
10			0,0036	0,0373	0,1075	0,1128	0,0196	0,0008	0,0000	0,0000
12			0,0003	0,0077	0,0443	0,1366	0,0576	0,0051	0,0000	0,0000
15				0,0003	0,0050	0,0774	0,1228	0,0366	0,0000	0,0000
18					0,0002	0,0172	0,1026	0,1031	0,0006	0,0000
20						0,0038	0,0554	**0,1254**	0,0038	0,0000
22						0,0006	0,0203	0,1031	0,0172	0,0000
25							0,0021	0,0366	0,0774	0,0000
30								0,0008	0,1128	0,0036
35									0,0061	0,1647
40										0,0148

Section 5: Loi de Poisson

La loi de poisson intervient pour des phénomènes statistiques dont le nombre de réalisation varie de 0 à l'infini et dont la fréquence moyenne de réalisation est connue.

Exemple:

- Nombre d'appels reçus par un standard téléphonique.
- Nombre d'accidents de la circulation.
- Nombre de visiteur d'un centre commercial.

Définition

La distribution de Poisson se définit par :

$$\boldsymbol{p(k) = P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Où $\lambda > 0$ est une constante.

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1}$$

Exemple

Sur un trajet ferroviaire, nous avons constaté **deux accidents** par an.

Quelle est la probabilité qu'il y en ait exactement $\boldsymbol{X = }$ ***dix incidents en neuf ans ?***

La quantité moyenne en dix ans (notre période de temps) se note $\boldsymbol{\lambda}$

2 accidents par an, soit $\mathbf{2 \times 9 = 18}$ accidents en **10 ans** : $\boldsymbol{\lambda} = 2 \times 9 = 18$

Pour 10 accidents :

$$(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}; \lambda) = \frac{\lambda^{k} \boldsymbol{e}^{-\lambda}}{\boldsymbol{k}!} = \boldsymbol{P}(\mathbf{10}; \mathbf{18}) = \frac{\mathbf{18^{10}} \boldsymbol{e}^{-\mathbf{18}}}{\mathbf{10}!} = \mathbf{0,01498} \approx \mathbf{1,50}\%$$

Chapitre 4: Lois de probabilités

Section 5: Loi de Poisson

Exemple

$$(X = k) = P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = P(10; 18) = \frac{18^{10} e^{-18}}{10!} = 0,01498 \approx 1,50\%$$

					λ				
k	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
1	0,0005	0,0002	0,0001						
2	0,0023	0,001	0,0004	0,0002	0,0001				
3	0,0076	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001		
4	0,0189	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001
5	0,0378	0,0224	0,0127	0,007	0,0037	0,0019	0,001	0,0005	0,0002
6	0,0631	0,0411	0,0255	0,0152	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007
7	0,0901	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,006	0,0034	0,0019
8	0,1126	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,012	0,0072	0,0042
9	0,1251	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083
10	0,1251	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,023	**0,015**

Propriétés de la loi de poisson

- L'espérance de la loi de Poisson : $\boldsymbol{E(X) = \lambda}$
- La variance de la loi de Poisson : $\boldsymbol{Var(X) = \lambda}$ **et** $\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\lambda}}$

Section 6: Loi Multinomiale

Définition

Nous avons vu précédemment que la **loi binomiale** résulte d'une suite de répétitions d'une même expérience, ne pouvant avoir que **deux résultats élémentaires**: **succès ou échec**.

La loi multinomiale donne **une généralisation** au cas où l'expérience **possède plusieurs résultats élémentaires.** Les expériences étant indépendantes entre elle et les probabilités des différents événements restent invariantes d'une expérience à une autre.

Une expérience aléatoire peut avoir comme résultat l'un des événements $\boldsymbol{A_1, A_2,\ldots A_k}$ avec les probabilités respectives $\boldsymbol{P_1,\ P_2,\ldots..\ P_k}$ (avec $\sum \boldsymbol{p_i} = \mathbf{1}$). Si on réalise ***n essais*** de cette expérience et on définit par $X_1, X_2, \ldots..\ X_k$ les nombres de réalisation des événements respectifs $\boldsymbol{A_1, A_2,\ldots A_k}$, avec $\boldsymbol{X_1 + X_2 + \ldots.. + X_k = n}$, alors:

$$\boldsymbol{P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots..\ X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} .. p_k^{n_k}}$$

Exemple

On jette **8 fois** un dé bien équilibré. La probabilité d'obtenir ***5* et 6 deux fois** et chacun des **autres résultats une fois** est :

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots.. X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} .. p_k^{n_k}$$

$$\frac{8!}{2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} \times \frac{1}{6}^2 \times \frac{1}{6}^2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{35}{5832} \approx 0,006$$

Chapitre 4: Lois de probabilités

Synthèse

Lois de probabilités discrètes

Lois	Notation	Définition	Espérance	Variance
Bernoulli	$\mathcal{B}(1,p)$	si succès $X = 1$ échec $X = 0$ $P(X = 0) = q$ $P(X = 1) = p$ avec $p + q = 1$	$E(X) = p$	$V(X) = pq$
Binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	X est une variable de Bernoulli $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	$E(S_n) = np$	$V(S_n) = npq$
Poisson	$P(\lambda)$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ avec $\lambda > 0$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$
Multinomiale		$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots.. X_k = n_k)$ $= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$		

Chapitre 4: Lois de probabilités

Synthèse

Lois de probabilités continues

Lois	Notation	Définition	Espérance	Variance
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$E(X) = \mu$	$V(X) = \sigma^2$
Normale réduite	$\mathcal{N}(0, 1)$	$X \backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $z \mapsto f(z) = f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$E(z) = 0$	$V(z) = 1$

Synthèse

Théorème central limite

Si $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi alors la v.a $\boldsymbol{Z_n} = \frac{\boldsymbol{S_n - n\mu}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{n}}}$ suit une loi normale réduite $N(0,1)$ et ceci quelque-soit la loi de probabilité suivie par les variables aléatoires.